Esercizio 1.

Dato il seguente modello matematico:

$$\max 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \tag{1}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4 \tag{2}$$
$$x_1 + 3x_3 \leq 2 \tag{3}$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \tag{4}$$

a) si rilassino i vincoli (2) e (3) in modo surrogato, utilizzando, rispettivamente, moltiplicatori $\pi_1 = 1$ e $\pi_2 = 2$.

b) Si risolva il problema rilassato con semplici considerazioni.

c) Si indichi se la soluzione ottima del problema rilassato è ammissibile e/o ottima per il problema (1)-(4), motivando la risposta.

d) Si consideri ora il **problema rilassato** ottenuto al punto **a)** e si rilassi l'unico vincolo in modo Lagrangiano, utilizzando moltiplicatore $\lambda = 1$. Si risolva il problema rilassato con semplici considerazioni e si indichi se la soluzione ottima del nuovo problema rilassato è ammissibile e/o ottima per il problema **(1)-(4)**, motivando la risposta.

Soluzione

a) Modello rilassato:

$$\max 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \tag{5}$$
$$4x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 8 \tag{6}$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \tag{7}$$

b) Si tratta di un KP01 con 3 oggetti. Si possono selezionare gli oggetti 1 e 2 con profitto 5, oppure gli oggetti 2 e 3 con profitto 6. Quinda la soluzione ottima del rilassamento è: $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$ con valore 6.

c) La soluzione non è ammissibile per il problema originale, in quanto viola il vincolo (3).

d) Modello rilassato:

$$8 + \max\left(-x_1 + x_2 - 2x_3\right) \tag{8}$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \tag{9}$$

La soluzione ottima del problema rilassato è $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 1$ in quanto x_2 è l'unica variabile con coefficiente positivo nella funzione obiettivo (da massimizzare) e non sono presenti altri vincoli sulle variabili oltre ai vincoli di dominio. Il valore della soluzione è 9.

La soluzione è ammissibile per il problema originale perchè rispetta entrambi i vincoli. Non è ottima per il problema originale perchè il vincolo rilassato in modo Lagrangiano non è soddisfatto all'uguaglianza.