Esercizi di Ottimizzazione

Esercizio 1

Un'azienda chimica produce due tipi di composto, A e B, che danno lo stesso profitto, utilizzando una sostanza base della quale sono disponibili 8 quintali. Ogni tonnellata di composto (indipendentemente dal tipo) contiene un quintale di sostanza base. Il numero di tonnellate di composto A prodotto deve superare di almeno una unità il numero di tonnellate di composto B prodotto. Per problemi di stoccaggio non si possono produrre più di 6 tonnellate di composto A. Si associ la variabile x_1 al composto A e la variabile x_2 al composto B.

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con il metodo delle due fasi e la regola di Bland, introducendo il minimo numero di variabili artificiali. Dire esplicitamente qual è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.
4. Costruire il duale del modello definito al punto 2 e ricavarne le soluzioni ottime.
5. Imporre il vincolo di interezza sulle variabili (supporre che non si possano produrre frazioni di tonnellate) e risolvere il problema con il metodo branch-and-bound.

Esercizio 2

Un'azienda produce panchine per giardini di due tipi utilizzando plastica riciclata e ricevendo un contributo statale di €40 per ogni panchina di tipo 1 e €30 per ogni panchina di tipo 2. La vendita di ogni panchina di tipo 1 causa una perdita di €10, mentre quella di ogni panchina di tipo 2 da un ricavo di €30. I macchinari utilizzati hanno un limite produttivo di 300 panchine per ciascun tipo. L'azienda vuole ricevere almeno €12000 di contributi statali. Si esprimano i livelli di produzione in centinaia di panchine ed i quantitativi monetari in migliaia di euro.

1. Definire il modello LP che massimizza l'introito complessivo dato dalla sola vendita delle panchine.
2. Risolvere con il metodo delle due fasi (leggere prima il punto 5), introducendo il minor numero possibile di variabili artificiali. In caso di parità, fare uscire dalla base una variabile artificiale.

3. Dare esplicitamente la soluzione trovata.
4. Disegnare con cura la regione ammissibile e indicarvi le soluzioni corrispondenti a ciascun tableau.
5. Definire il duale della forma standard del modello del punto 1 e ricavarne la soluzione dai tableau prodotti.
6. Imporre l'ulteriore vincolo che debba essere prodotto un numero intero di centinaia di panchine. Risolvere con il metodo di Gomory.

Esercizio 3

Un'azienda realizza unità indivisibili di due tipi di prodotto (X e Y). Il profitto dato da un'unità di prodotto Y è doppio di quello dato da un'unità di prodotto X. La produzione di un'unità di prodotto di qualunque tipo richiede due ore di lavoro di un impianto che non può restare in funzione per più di 9 ore complessive al giorno. La produzione del tipo Y non deve superare le due unità giornaliere. Si richiede, inoltre, che la produzione giornaliera del tipo X non superi quella del tipo Y di più di una unità.

a) Senza introdurre semplificazioni, definire il modello di programmazione lineare intera per determinare la produzione giornaliera di massimo profitto, associando la variabile x_1 al prodotto X e la variabile x_2 al prodotto Y.

b) Risolvere con l'algoritmo branch-and-bound, scegliendo per il branching la variabile frazionaria di indice massimo ed esplorando per primo il nodo corrispondente alla condizione $x_j \leq \alpha$. Nell'algoritmo delle due fasi si scelga per il pivoting la variabile con costo relativo più negativo.

c) Disegnare la regione ammissibile del problema, evidenziandola con chiarezza e dutilizzando quattro quadretti per unità, ed indicarvi le soluzioni corrispondenti a ciascun tableau ed i tagli generati.

Esercizio 4

Un'azienda cimica produce lotti indivisibili di due composti (1 e 2) utilizzando due sostanze chimiche (A e B). Ogni lotto di composto 1 richiede 3 tonnellate di sostanza A e 3 tonnellate di sostanza B. Ogni lotto di composto 2 richiede 6 tonnellate di A e 3 di B. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 3 lotti di composto 1. Sono disponibili 12 tonnellate di A e 9 di B. Ogni lotto di composto 1 dà un profitto di €12000, mentre ogni lotto di composto 2 dà un profitto di €15000.

a) Senza introdurre semplificazioni si scriva il modello ILP che determina la produzione di massimo profitto.

b) Si rilassi il vincolo relativo alla sostana B in maniera lagrangiana, utilizzando $\lambda = 3$ come moltiplicatore.

c) Si calcoli un upper bound per il problema originale mediante la soluzione del problema rilassato utilizzando il metodo di Gomory e la regola di Bland. Si descriva esplicitamente la soluzione del problema rilassato e si indichi il valore dell'upper bound.

d) Si disegni la regione ammissibile del problema rilassato, utilizzando 4 quadretti per unità, e vi si indichino le souzioni corrispondenti a ciascun tableau e i tagli generati.

e) Si dica se la soluzione del problema rilassato è ottima per il problema originale e si motivi la risposta